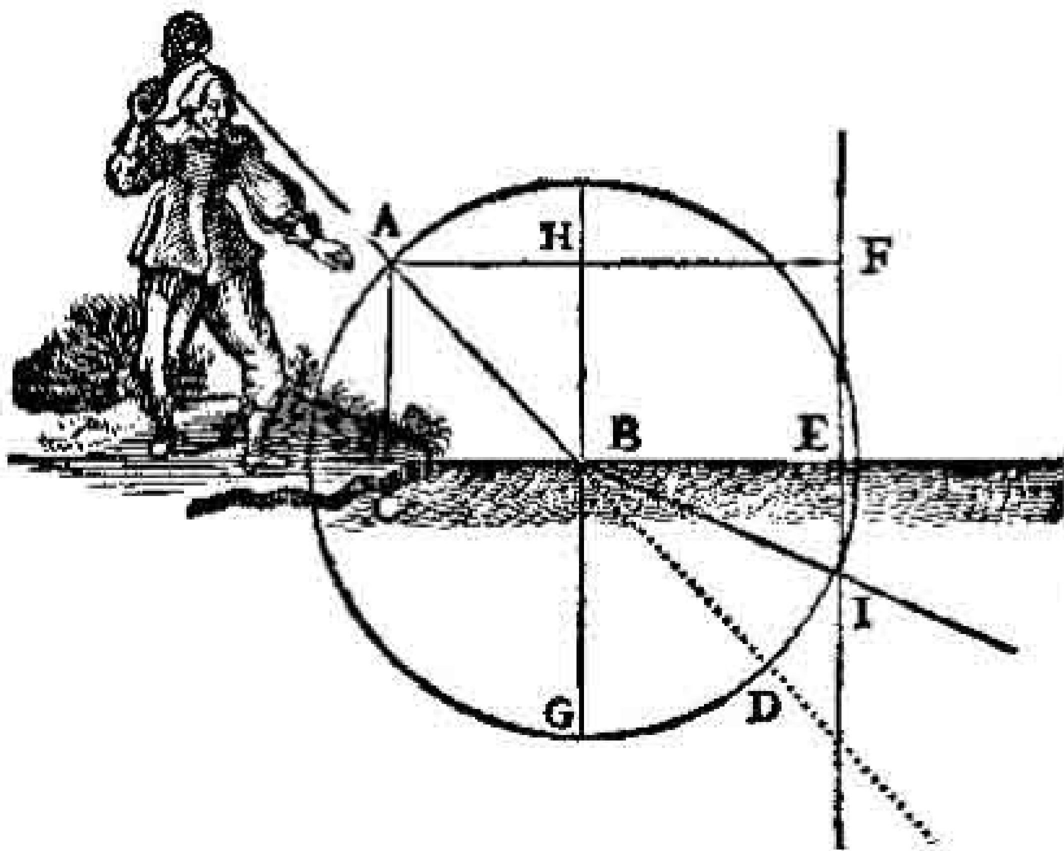
Université Pierre et Marie Curie
Licence 1er année
UE LP 103

Cours d'Optique géométrique

Reza.Samadi@obspm.fr

http://www.edu.upmc.fr/physique/lp103ElectOpt/



(*illustration tirée du « Discours de la méthode » de Descartes , noter l'erreur …)*

1 Bases de l'Optique géométrique

Faisceaux lumineux ; lois de Snell-Descartes ; Notion de stigmatisme ; Approximation de Gauss ; Relation de conjugaison des dioptres sphériques.

1.1 Faisceaux lumineux

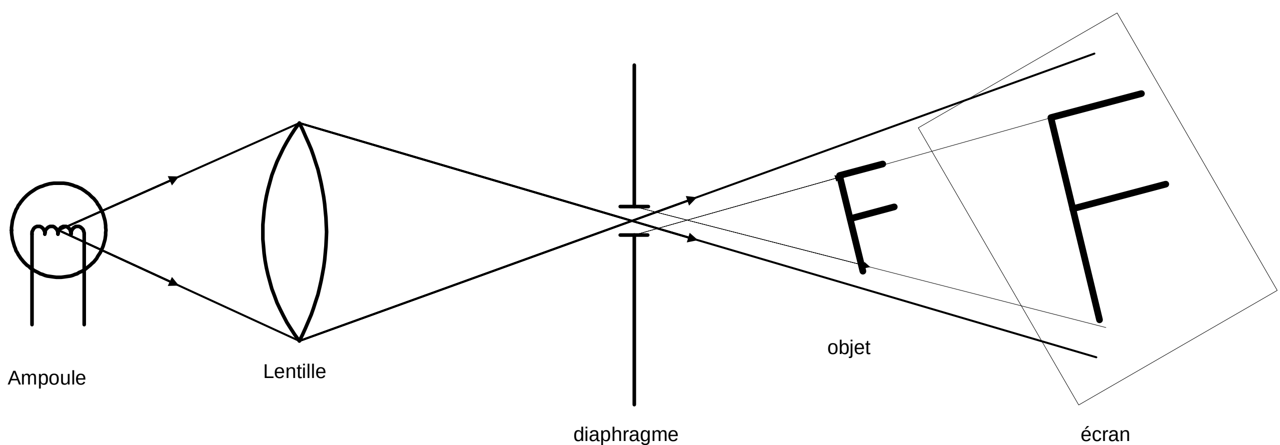


Figure 1

Le montage optique de la Figure 1 montre que l'ombre qui se forme sur l'écran est homothétique de l'objet ☞ Ceci suggère que la lumière se propage en faisceaux rectilignes.

L'optique géométrique est l'étude des rayons lumineux dans des milieux transparents.

Principe du retour inverse de la lumière : il n'y a pas de sens de parcours privilégié. Si un rayon lumineux va d'un point A à un point B, un autre rayon est capable de parcourir ce trajet dans le sens inverse i.e de B vers A.

Indépendance des rayons lumineux : dans le cadre de l'optique géométrique on se place dans des conditions où les rayons lumineux n'interfèrent pas entre eux ; autrement dit, dans ce cadre, les rayons lumineux sont considérés indépendants les uns des autres.

Notion de rayon virtuel : sur la Figure 2 les rayons parallèles sont déviés par la lentille divergente. Les rayons déviés semblent provenir du point source F'. Toutefois les segments F'A1 et F'A2 ne sont pas effectivement suivis par la

lumière. Il s’agit de rayons virtuels et F’ constitue une source virtuelle.

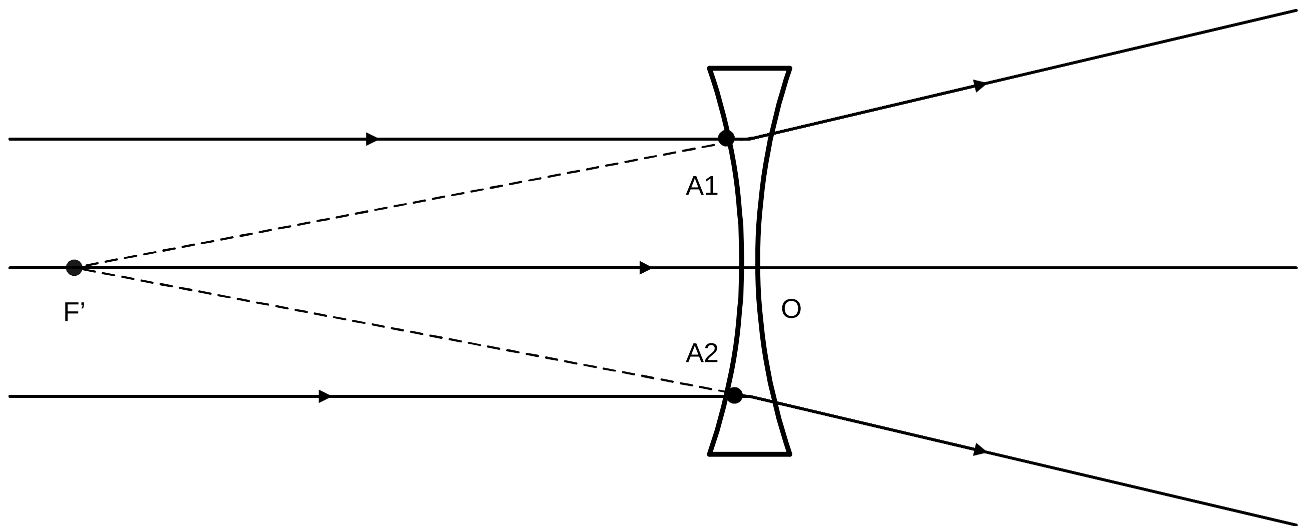


Figure 2

Limite de l'optique géométrique :

- La diffraction (phénomène d’interférence : inhérent à la nature ondulatoire de la lumière). Ce phénomène est illustré sur la Figure 3. Tant que le diaphragme de diamètre *a* est plus grand qu’une longueur caractéristique (qui s’avère être la longueur d’onde du rayonnement), le faisceau sortant reste aligné avec le faisceau du laser. En revanche lorsque *a* devient plus petite que cette longueur caractéristique le faisceau émergent s’élargit.
- L'aspect corpusculaire de la lumière: la lumière exerce une force de pression (faible devant la pression atmosphérique) que l’on appelle pression de radiation. En fait on sait que la lumière est composée de particules que l’on appelle photons. La pression de radiation exercée par un faisceau de lumière sur une surface est alors attribuée à un flux de photons sur la surface (analogie avec la théorie cinétique des gaz).

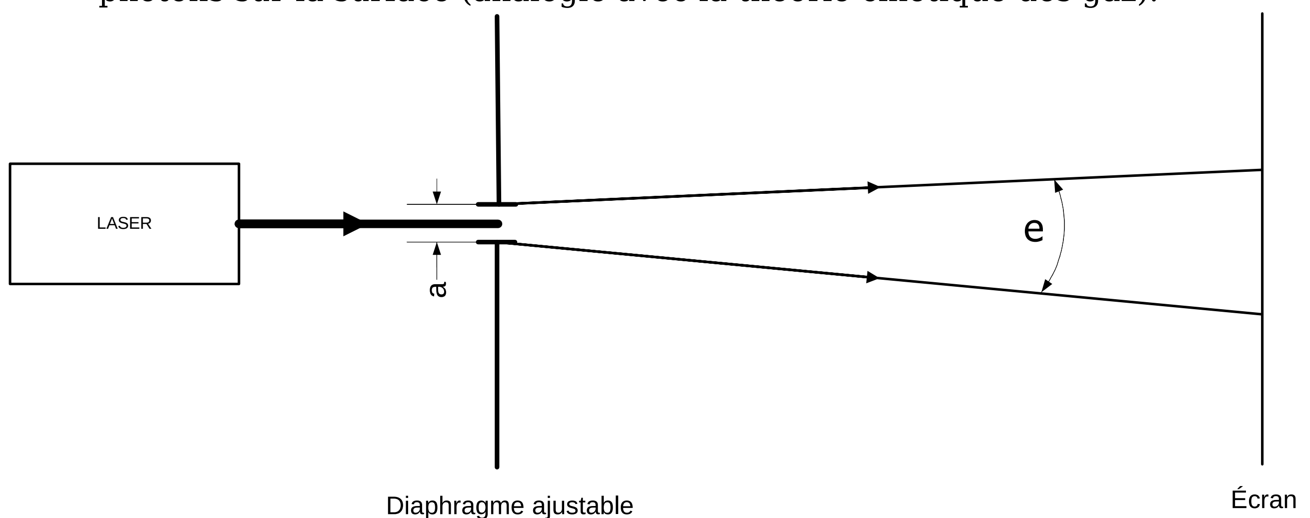


Figure 3

1.2 Lois de Snell-Descartes

Historique: La loi de la réfraction fut établie expérimentalement en 1621 par le hollandais Snellius. Plus tard, en 1637, Descartes publie son fameux traité «Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences, plus la dioptrique, les météores et la géométrie». Il y démontre les lois de la réflexion et de la réfraction (voir ci-dessous) à l'aide d'une analogie mécanique ; en se basant donc sur une conception corpusculaire de la lumière.

1.2.1 Loi de la réflexion

Soit le dioptre (surface séparant deux milieux distincts) plan de la Figure 4.
Angle d'incidence i, angle de réflexion i' (Figure 4).

- Le faisceau réfléchi est dans le plan d'incidence (plan formé par la normale au dioptre et le faisceau incident).
- Ces angles vérifient $i = i'$.

Analogie mécanique : balle de tennis projetée sur un mur.

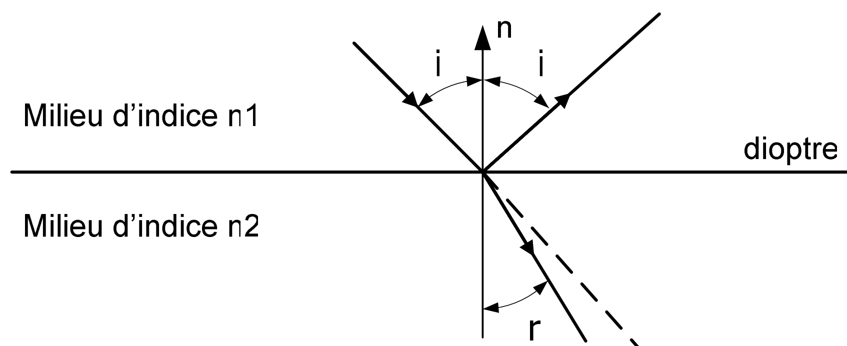


Figure 4

1.2.2 Loi de la réfraction

Manifestation naturelle et caractéristique :

- Exemple des objets plongés dans l'eau : le bâton dans l'eau qui apparaît brisé (Figure 5) et le poisson qui semble plus près de la surface qu'il n'ait vraiment (Figure 5).
- L'exemple du mirage (Figure 6): La densité de l'air varie avec la température : variation de l'indice. On montre que pour un gaz: $(n-1)/\rho =$ Cte où ρ est la densité du milieu.

L'indice absolu du vide est égal à l'unité (n=1). Les indices de différents matériaux sont donnés dans le tableau suivant :

Matériau	Indice (à λ= 589 nm)
Eau	1,33

Verre crown	1,52
Verre flint	1,67
Diamant	2,42
Fluorine	1,43

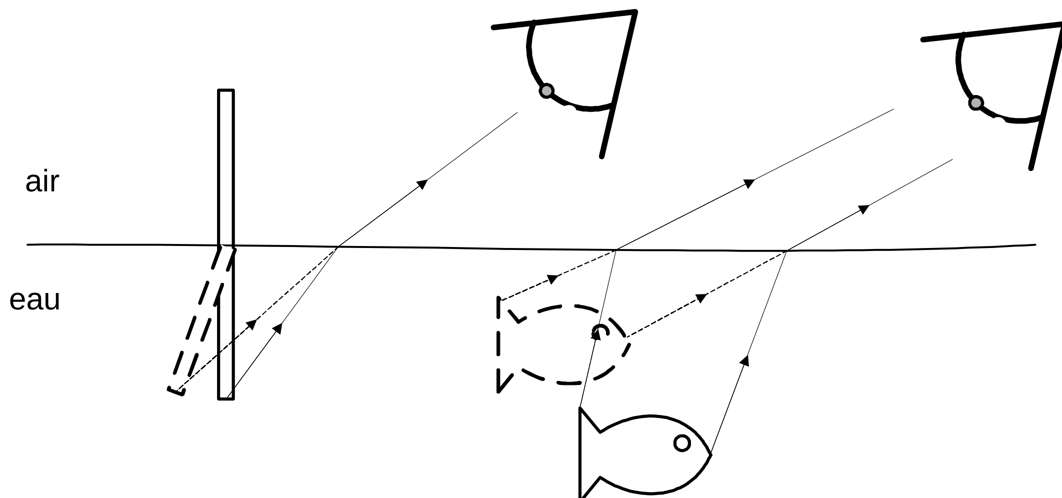


Figure 5

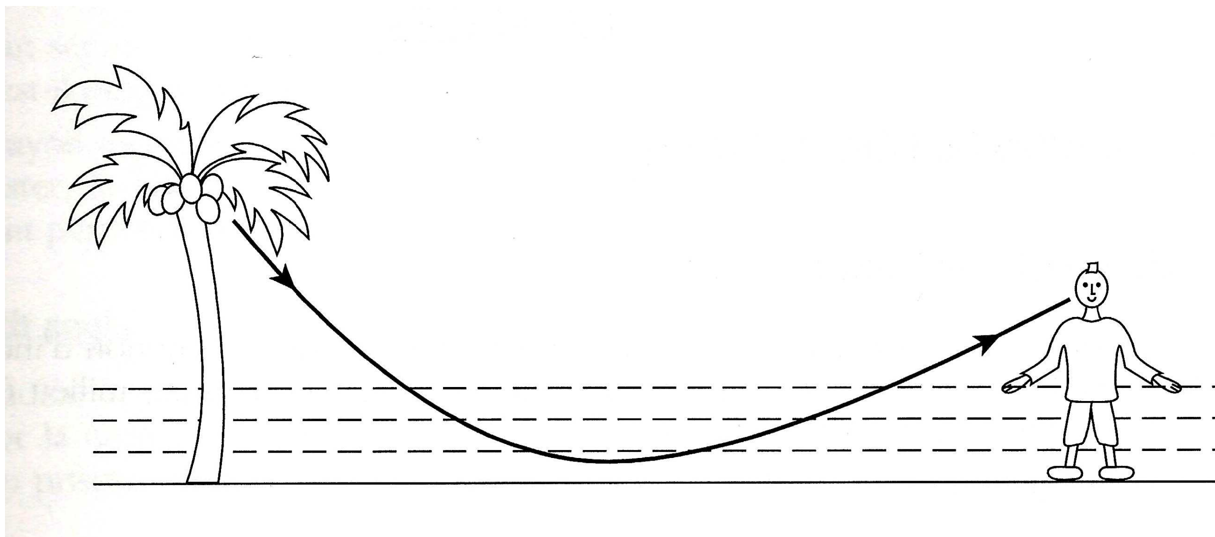


Figure 6

Propriétés vérifiées par le rayon réfracté (Figure 4) :

- Le rayon réfracté est dans le plan d'incidence.
- Angles d'incidence (i) et de réfraction (r) sont liés par la relation:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r \quad (1)$$

où n1 est l'indice du milieu 1 et n2 du milieu 2.

Angle de réflexion totale :
Supposons que n1>n2 , on a alors que *i<r* quelque soit la valeur de *i*. Lorsqu'on fait croître *i* de 0 à π/2, *r* va atteindre l'angle π/2 pour un certain angla *i*=α défini tel que :

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\frac{\pi}{2} = n_2 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{n_2}{n_1}$$

On remarque que lorsque *i*>α, sin(i)n1/n2 > 1 et il n'existe pas d'angle *r* vérifiant la relation (1). Expérimentalement on constate effectivement lorsque *i*> α toute la lumière est réfléchie. Le dioptre se comporte comme un miroir ☞ phénomène de *réflexion totale* ; l'angle α est l'angle de réflexion totale.

Angle de réfraction limite : Supposons maintenant que n2>n1, alors *i>r* quelque soit la valeur de *i* dans l'intervalle [0, π/2]. Lorsque *i*=π/2, alors *r* atteint l'angle limite β (dit angle de réfraction limite) qui est tel que :

$$n_1 = n_2 \sin\beta \Rightarrow \sin\beta = \frac{n_1}{n_2}$$

Loi de Kepler:
Lorsque *i* et *r* sont petits, la loi de Descartes (Eq. 1) prend la forme:

$$n_1\, i = n_2\, r$$

On montre que l'indice d'un milieu est égal à: n = c / v où *v* est la vitesse de la lumière dans le milieu considéré et *c* celle dans le vide.

Principe de Fermat : La loi de la réfraction est reliée au principe de Fermat (1601-1665) : « la lumière choisit toujours, pour aller d'un point à un autre, le chemin ayant le temps de parcours minimal ». La Figure 7 illustre ce principe par une analogie.

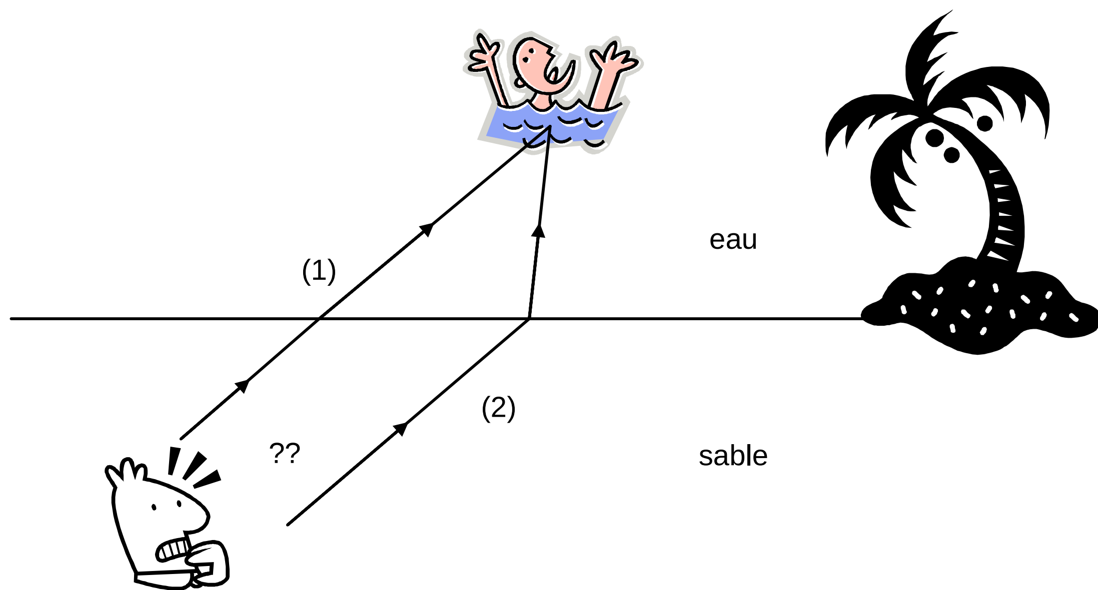


Figure 7

La lumière comme le sauveteur choisira le trajet le plus court: le trajet en ligne droite (1) est plus long que le trajet (2) car on se déplace moins vite dans l'eau que sur le sable… Ce raisonnement s'applique à la lumière si on remplace le sable par l'air (indice ~1). On montre que ce principe permet d'établir la loi de la réfraction de Descartes et ainsi que la formule reliant l'indice n d'un milieu aux vitesses de la lumière dans ce milieu et dans le vide (i.e. $n=c/v$).

1.3 Notion de stigmatisme

1.3.1 Stigmatisme parfait

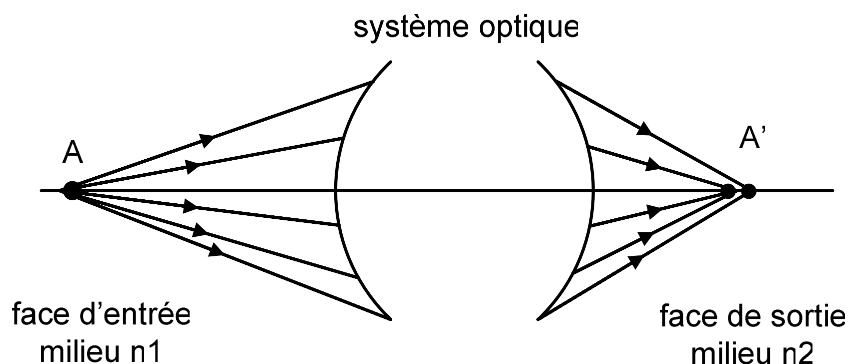


Figure 8

Soit les notations de la Figure 8:
S: un système optique quelconque. A: l'objet. A': l'image de A à travers S.

On dit que A' et A sont conjugués par rapport à S.
☞ L'image est réelle si les rayons émergents passent effectivement par A'
☞ L'image est virtuelle si les prolongements des faisceaux émergents passe par

A'.

Un système optique est dit rigoureusement stigmatique si tout rayon passant par A passe par A' après avoir traversé le système optique (S). Autrement dit : Un système optique S est stigmatique si tout objet A admet à travers S une image A' unique.

Dans l'exemple de la Figure 8, on ne vérifie pas la condition de stigmatisme exact.

Exemple de stigmatisme rigoureux: le miroir elliptique parabolique (rigoureusement stigmatique aux foyers de l'ellipse, voir Figure 9), le miroir parabolique (rigoureusement stigmatique pour l'objet placé à l'infini) et le miroir plan (stigmatisme exacte en tout point).

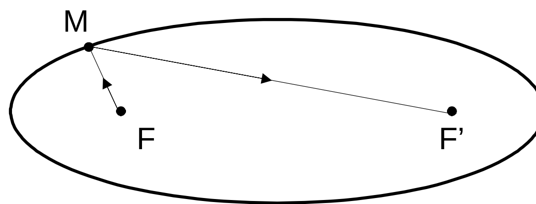


Figure 9

1.3.2 Stigmatisme approché

Les cas de stigmatisme rigoureux sont rares, c'est pourquoi on se contente bien souvent d'un stigmatisme dit approché.

Un système optique présente un stigmatisme approché si tout rayon passant par A passe au voisinage de A' après avoir traversé le système optique (S).

Système centré: système optique ayant la symétrie de révolution autour d'un axe appelé axe optique.

Notion d'aplanétisme: lorsque le plan image (π) est parallèle au plan objet (π').
Les plans image et objet sont dits conjugués.

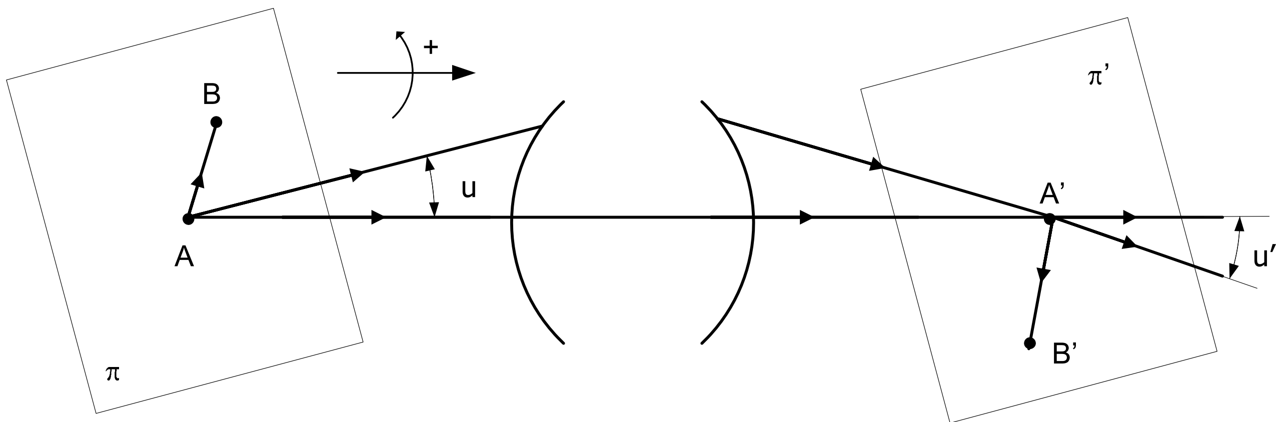


Figure 10

1.4 L'approximation de Gauss

Conditions de Gauss: un système centré est utilisé dans l'approximation de Gauss lorsque les rayons qui le traversent forment un angle faible avec l'axe optique du système (par angle « faible » on entend faible par rapport à l'angle sous lequel on voit l'ouverture de l'instrument) *et* lorsque ceux-ci sont peu éloignés de l'axe optique (i.e. à une distance courte devant l'échelle caractéristique du système optique).

On a alors les propriétés suivantes (voir Figure 10):

- Relation de conjugaison: Le système vérifiant les conditions de Gauss assure un stigmatisme et un aplanétisme approchés.
- Grandissement transversal : Tout couple de points conjugués (B,B') vérifient la relation

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = Cte \equiv \Gamma$$

où la constante Γ est appelée grandissement transversal.
Autrement dit les points images sont en relation homothétique avec leur conjugués. Le grandissement transversal dépend de la position des plans conjugués.

- Grandissement angulaire : Angles incidents et émergents vérifient également :

$$\frac{u'}{u} = Cte \equiv \lambda$$

où la constante λ est appelée grandissement angulaire. A nouveau, le grandissement angulaire ne dépend que de la position des plans conjugués.

- Invariant de Lagrange-Helmholtz: on a enfin la relation:

$$n\,\overline{AB}\,u = n'\,\overline{A'B'}\,u'$$

soit de manière équivalente:

$$n/n' = \Gamma\,\lambda$$

Des considérations purement géométriques permettent de démontrer l'ensemble de ces propriétés qui seront démontrées de manière explicite au cours du TD 1 pour le dioptre sphérique et dans le chapitre 2 dans le cas des miroirs sphériques.

1.5 Relation de conjugaison des dioptres sphériques

Soit un dioptre sphérique de centre C, de rayon de courbure R, de sommet S et séparant un milieu d'indice n1 d'un milieu d'indice n2 (voir Figure 11 dans le cas où $n_2>n_1$).
Soit le rayon AS, ce rayon étant normal à la surface, il traverse le dioptre sans être dévié (incidence nulle) et passe alors par le centre C.

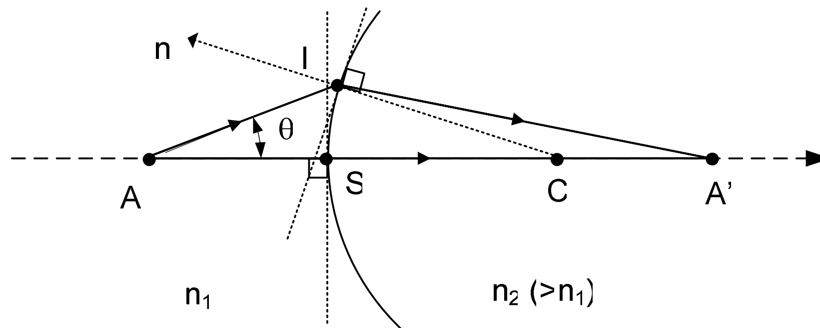


Figure 11

Un rayon quelconque AI, faisant un angle θ avec l'axe SC, traverse le dioptre au point I. Ce rayon est réfracté avec un angle donné par rapport à la normale au dioptre au point I. Soit A' l'intersection entre le rayon émergent et l'axe SC du dioptre. Si l'angle est petit (*conditions de Gauss*), on montre (voir TD 1) que le point A' ne dépend pas de l'angle θ. Autrement dit l'ensemble des rayons AI faisant un angle faible par rapport à l'axe SC passent par un point *unique* A'. Dans ces conditions le dioptre sphérique assure donc un *stigmatisme approché*. On montre en outre que l'objet A et l'image A' sont liés par la *relation de conjugaison* suivante (voir TD série n°1) :

$$\frac{n_2}{\overline{SA'}} - \frac{n_1}{\overline{SA}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}}$$

<u>Cas particulier des dioptres plans</u> :
Un plan (voir Figure 12) est assimilable à une sphère de *rayon de courbure infini* ; i.e. $SC \to \infty$. Dans ces conditions l'équation précédente se ramène à la relation :

$$\frac{n_2}{\overline{SA'}} = \frac{n_1}{\overline{SA}}$$

dite relation de conjugaison des dioptres plans.

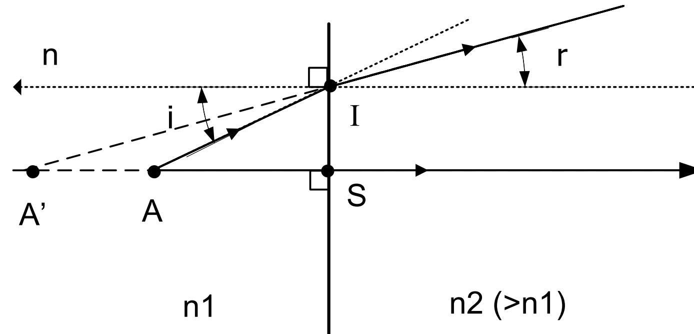


Figure 12

La relation précédente se démontre par ailleurs aisément en s'appuyant sur la construction géométrique (Figure 12) et l'aide de la loi de la réfraction. On constate, aussi bien d'après la figure que d'après la relation de conjugaison, que l'image A' est nécessairement virtuelle puisque SA'<0.

Références :

- Ouvrage de vulgarisation : « La lumière », Bernard Maitte, Edition du Seuil, Collection « Sciences ».
- Pour approfondir (niveau L1 à L3) : « Optique : Fondements et applications », J.-P. Pérez, Collection « Enseignement de la Physique », Edition Masson.

2 Systèmes optiques de bases

Systèmes optiques de base : Miroirs et lentilles minces ; Relations de conjugaison et de grandissement

2.1 Définitions et propriétés générales

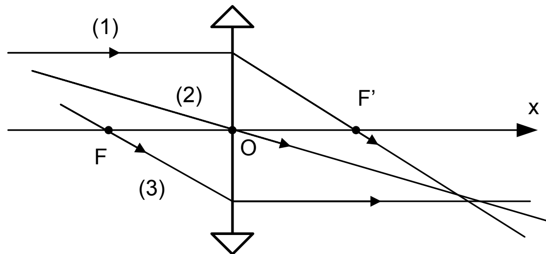
Les systèmes optiques étudiés dans ce chapitre seront tous des systèmes centrés utilisés dans l'approximation de Gauss.

Le *foyer principal image* (F') est le point conjugué (i.e. l'image) d'un objet placé à l'infini sur l'axe optique ; autrement dit c'est le point de convergence d'un faisceau parallèle à l'axe optique.

En vertu du principe de retour inverse de la lumière : le *foyer principal objet* (F) a pour image un point placé à l'infini sur l'axe optique ; autrement dit un faisceau passant par le foyer principal objet émerge du système en faisceau parallèle à l'axe optique.

Propriétés de quelques rayons particuliers (propriétés utiles pour la construction d'images ; le cas des lentilles convergentes est illustré sur la Figure 13) :

- Un rayon (1) parallèle à l'axe optique ressort sous forme d'un rayon passant par le foyer image.
- Un rayon (2) passant par le centre optique n'est pas dévié.
- Un rayon (3) passant par le foyer objet ressort du système optique en un rayon parallèle à l'axe optique.



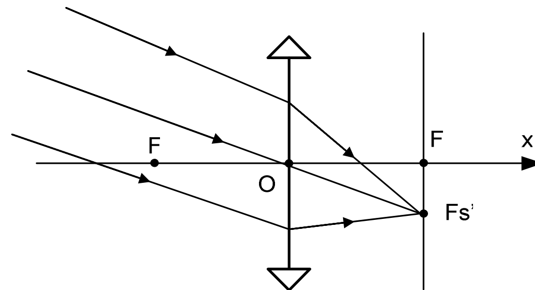


Figure 13 (à gauche) : Propriétés de quelques rayons particuliers

Figure 14 (à droite) : Foyer secondaire image (Fs').

- Soit un rayon *par-axial* passant par le centre optique (voir Figure 14). Ce rayon qui n'est pas dévié par le système, rencontre le plan focal au point Fs'. Dans les conditions de stigmatisme (approché ou rigoureux), tous les rayons qui lui sont parallèles convergent tous en un unique point qui est le point Fs', appelé *foyer secondaire image.* Ce foyer image secondaire correspond à l'image d'un objet situé à l'infini dans une direction *par-axiale*.
- Inversement : Soit un point Fs situé sur le plan focal objet. Tous les rayons partant du point Fs, sortent du système en un faisceau de rayons parallèles. Le point Fs est alors appelé *foyer secondaire objet*. Son image est située à l'infini dans une direction *par-axiale*.

2.2 Miroirs sphériques

Les miroirs sphériques sont constitués d'une surface sphérique sur laquelle un dépôt métallique a été appliqué de manière à réfléchir totalement la lumière. Deux types de miroirs sphériques : miroir concave (Figure 15) et convexe (Figure 16). C et S désignent respectivement le centre et le sommet des miroirs. **SC**<0 pour le miroir concave et **SC**>0 pour le miroir convexe.

Remarques :

- Un rayon passant par le centre C n'est pas dévié
- Les points S et C constituent des points où le stigmatisme est exact (ou rigoureux), on les appelle points de Weierstrass.

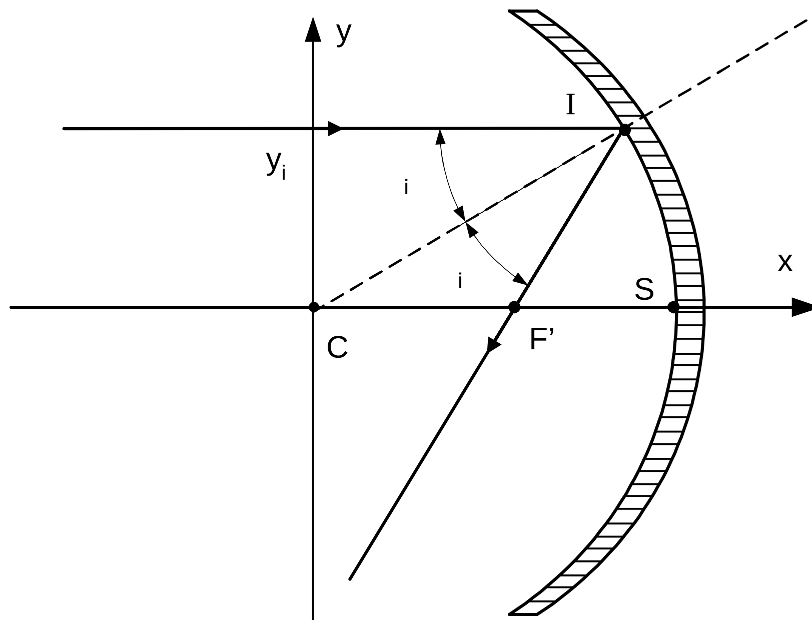


Figure 15 : Miroir concave

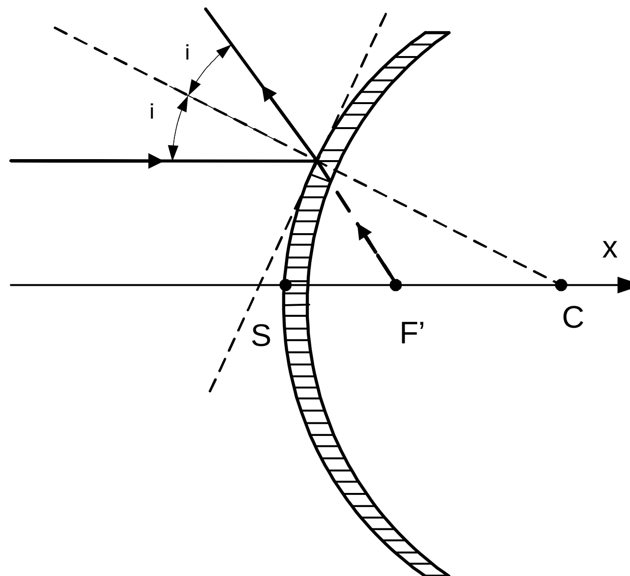


Figure 16 : Miroir convexe

2.2.1 Foyers

On considère un rayon parallèle à l'axe optique ; celui-ci fait un angle *i* par rapport à la normale à la tangente à la sphère au point I. Soit F' l'intersection du rayon réfracté avec l'axe optique. On montre alors que **CF'** = R/ (2 cos(*i*)). Si on introduit y_i , l'ordonnée du rayon , on montre alors que

$$\overline{CF'} = \frac{R}{2}\left(1-\left(\frac{y_i}{R}\right)^2\right)^{-1/2}$$. On utilise ce miroir dans les conditions de Gauss, *i.e.* on considère un rayon peu éloigné de l'axe ; autrement dit y_i <<R (Ce qui impose par ailleurs que l'angle *i* est petit et donc cos(*i*) ≅1). On a par conséquent : $\overline{CF'} = \frac{R}{2} = \frac{\overline{CS}}{2}$ lorsque le rayon est peu éloigné de l'axe.

Dans les conditions de Gauss :

☞ L'objet situé à l'infini et son image F' vérifient donc un stigmatisme *approché*.

☞ F' est par définition le foyer image du miroir.

☞ Les foyers principaux objet (F) et image (F') d'un miroir sont confondus (F=F').

La distance focale f' est par définition la grandeur *algébrique* :

$$f' \equiv \overline{CF'} = \overline{CF} \equiv f$$

et la vergence D se définit comme :

$$D \equiv \frac{1}{f'}$$

☞ L'unité associée à la vergence est appelée dioptrie (δ) et correspond à des m^{-1}.

2.2.2 Relations de conjugaison avec origine au sommet

Soit un point A sur l'axe optique d'un miroir et A' son image à travers celui-ci (Figure 17).

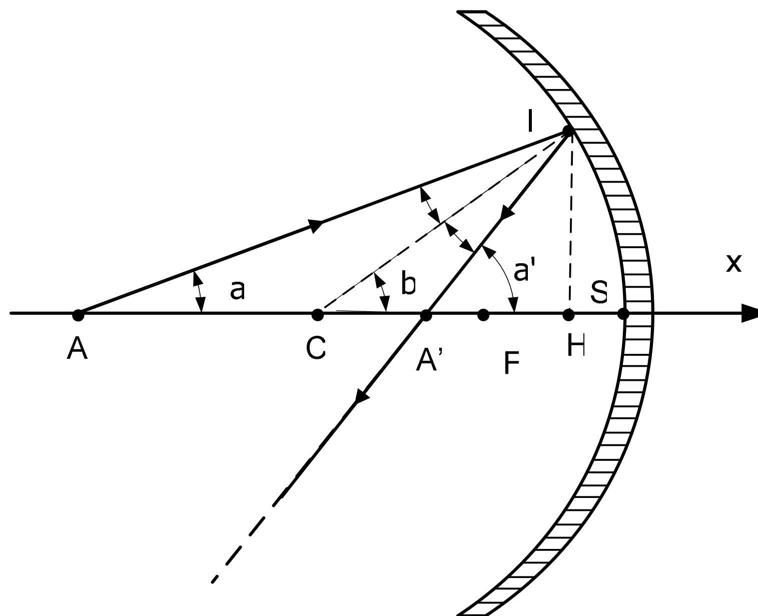


Figure 17 : Image d'un point sur l'axe à travers un miroir concave

On montre que deux points conjugués (A,A') situés sur l'axe optique vérifient -

dans l’approximation de Gauss - la relation de conjugaison dite formule de Descartes avec origine au sommet :

$$\frac{1}{\overline{SA}}+\frac{1}{\overline{SA'}}=\frac{2}{\overline{SC}}$$

Cette relation est générale que le miroir soit concave ou convexe.
Pour démontrer cette relation faisons intervenir les points H et I ainsi que les angles *b*, *a* et *a’* représentés sur la Figure 17. On se place dans l’approximation de Gauss : l’angle *a* est donc petit ce qui implique HI << CS. Par conséquent le point H est quasiment confondu avec le sommet S et l’on a :

$$a=-\frac{\overline{HI}}{\overline{SA}}\ ,\quad a'=-\frac{\overline{HI}}{\overline{SA'}}\ \text{ et }\ b=-\frac{\overline{HI}}{\overline{SC}}$$

On montre enfin que *a+a’=2b*. On en déduit alors aisément la relation de conjugaison donnée précédemment.

Dans les conditions usuelles d’utilisation des miroirs sphériques (conditions de Gauss), l’angle *a* est petit et par conséquent la surface utile du dioptre est approximativement plane. C’est la raison pour laquelle on représente généralement ces dioptres comme le montre la Figure 18.

2.2.3 Relations de conjugaison et de grandissement avec origine au foyer

Soit B un point objet situé sur le plan perpendiculaire à l’axe optique et passant par A et soit B’ son image (voir Figure 18).

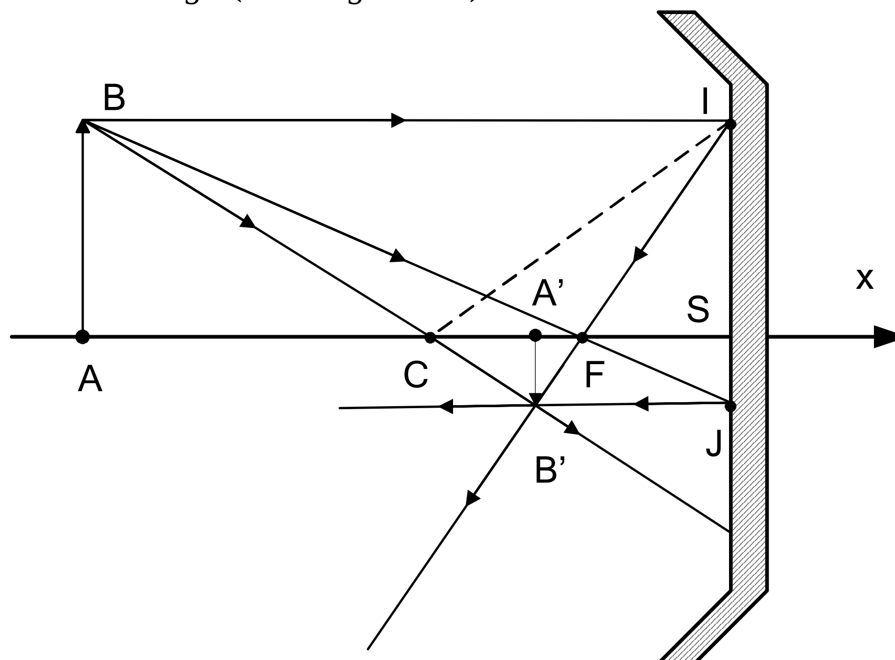


Figure 18 : représentation schématique d’un miroir concave ; construction d’une image

En utilisant les triangles ABF et SJF on établit la relation :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{SJ}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{FS}} \qquad (1)$$

De même à partir des triangles A’B’F et SIF on établit la relation :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{SI}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'S}} \qquad (2)$$

Par ailleurs $\overline{AB} = \overline{SI}$ et $\overline{A'B'} = \overline{SJ}$; donc en multipliant membre à membre Eq. (1) et Eq. (2), on dérive la relation de conjugaison dite formule de Newton :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = \overline{FS} \cdot \overline{F'S} = f\,f' = f^2 = \frac{R^2}{4}$$

On dérive immédiatement des Eq. (1) et Eq. (2) la relation pour le grandissement vertical :

$$\Gamma \equiv \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}}$$

2.2.4 Relations de conjugaison et de grandissement avec origine au centre

En introduisant le point C dans la formule de Newton, il vient, après quelques manipulations algébriques, la formule dite de Descartes avec origine au centre :

$$\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{2}{\overline{CS}}$$

La formule de Thalès appliquée à l’ensemble des points A,B,A’,B’ et C’ permet d’établir l’expression du grandissement transversal avec origine au centre :

$$\Gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$$

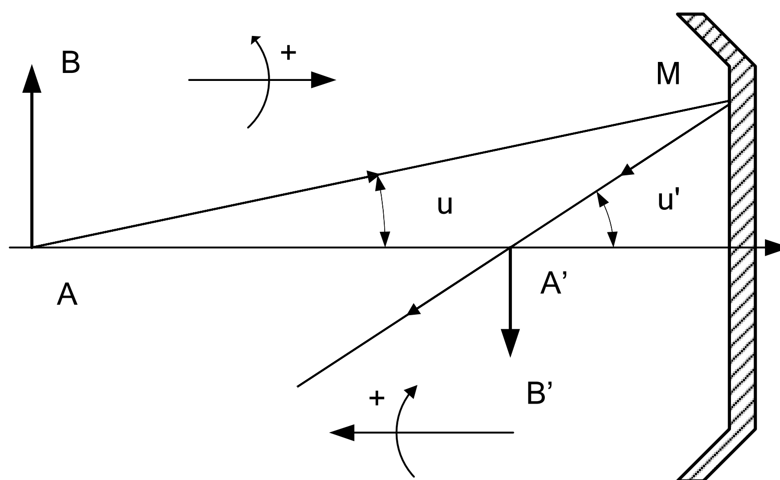


Figure 19

2.2.5 Relation de Lagrange – Helmholtz

Soit les trajets optiques de la Figure 19. Soit u l'angle entre le rayon incident et l'axe optique et u' entre le rayon émergent et l'axe optique. (Notez que par convention les angles sont définis positifs par rapport au sens de propagation de la lumière. Le sens de propagation de la lumière s'inversant à cause du miroir, l'orientation des angles u et u' s'inverse ; voir Figure 19).

On a dans l'approximation de Gauss :

$u = \overline{SM} / \overline{AS}$ et $u' = -\overline{SM} / \overline{A'S}$

Par ailleurs le grandissement vertical avec origine au sommet s'écrit :

$$\Gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

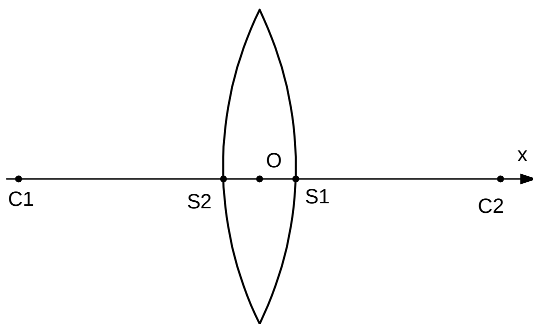
On en déduit alors aisément l'invariant de Lagrange – Helmholtz :

$$\overline{AB}\, u = \overline{A'B'}\, u'$$

2.3 Lentilles minces (sphériques)

Les lentilles sphériques sont constituées de verre et sont délimitées par deux surfaces sphériques de courbures $R_1 = \overline{C_1S_1}$ et $R_2 = \overline{C_2S_2}$, de centres C1 et C2 et de sommets S1 et S2 respectivement (voir Figure 20 et Figure 21). Lorsque R1>0 et R2<0, la lentille est biconvex (Figure 20); lorsque R2>0 et R1<0 elle est biconcave (Figure 21). Elles sont minces lorsque la distance (S1S2) est très petite devant les rayons de courbures R_1 et R_2. On définit la distance focale f' d'une lentille la grandeur algébrique :

$$f' \equiv \overline{OF'} = -\overline{OF} \equiv f$$



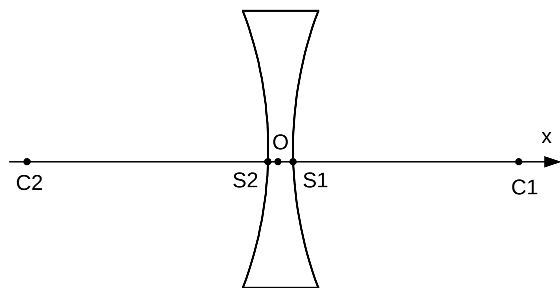


Figure 20 (à gauche) : Lentille mince convergente (biconvexe)

Figure 21 (à droite) : Lentille divergente (biconcave)

On montre que la vergence D d'une lentille mince s'exprime comme (voir le TD série n°2 pour la démonstration) :

$$D=\frac{1}{f'}=(n-1)\left(\frac{1}{\overline{S_2C_2}}-\frac{1}{\overline{S_1C_1}}\right)=(1-n)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)$$

où *n* est l'indice du matériau dont est composé la lentille.
Puisque *n*>1, on a bien f'>0 pour une lentille convergente (Figure 20) et f'<0 pour une lentille divergente (Figure 21).
Les lentilles plans convexe et concave (Figure 22) correspondent à des lentilles particulières pour lesquelles R1= infini (le plan ayant un rayon de courbure infini). La formule de l'équation générale pour la vergence D peut leur être appliquée en négligeant R1 devant R2 ce qui donne :

$$D=\frac{1}{f'}=(1-n)\frac{1}{R_2}$$

On considérera dans la suite des lentilles *minces* avec des rayons de courbures R_1 et R_2 égaux en valeur absolu ($R_{1=-}R_2$). Dans ces conditions la vergence s'exprime :

$$D=\frac{1}{f'}=(n-1)\frac{2}{R_1}$$

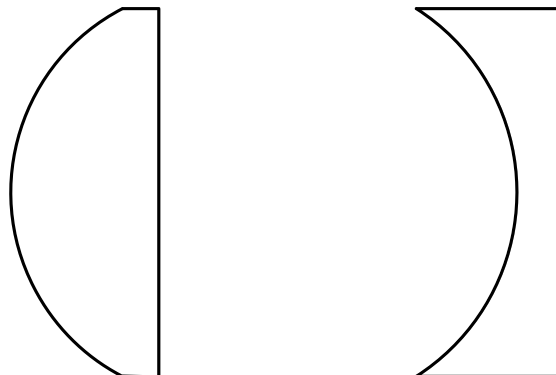


Figure 22 : lentilles plans, convexe (à gauche) et concave (à droite)

Les Figures Figure 23 et Figure 24 correspondent à des représentations schématiques des lentilles convergentes et divergentes.

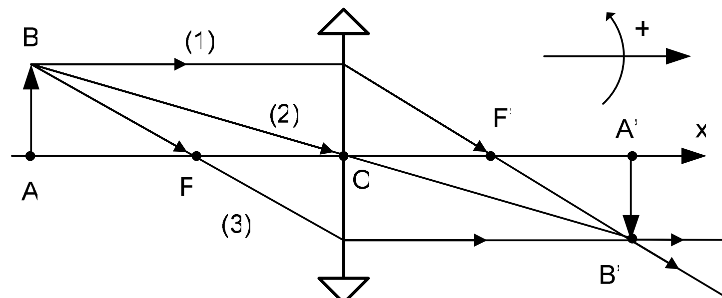


Figure 23 : représentation schématique d'une lentille convergente; construction d'une

image à partir d’un objet réel, AB, situé avant le foyer objet.

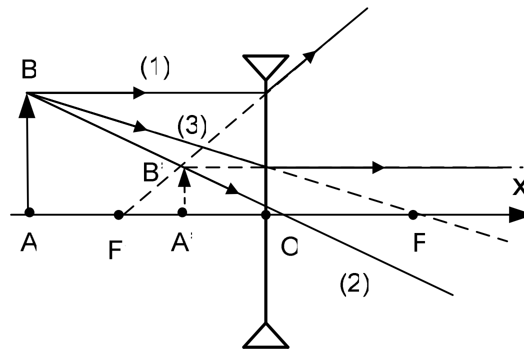


Figure 24 : représentation schématique d'une lentille divergente ; construction d’une image à partir d’un objet réel, AB.

2.3.1 Formules de conjugaison et de grandissement avec origines aux foyers

Des considérations géométriques nous permettent d’établir les expressions du grandissement transversal :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{f'}{\overline{FA}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}$$

en égalant ces deux relations on établit la relation de conjugaison avec origine aux foyers, dite formule de Newton :

$$\overline{FA}\cdot\overline{F'A'} = f'\ f = -\left(f'\right)^2$$

2.3.2 Formules de conjugaison et de grandissement avec origine au centre

En introduisant le centre O dans la formule de Newton on établit la relation de conjugaison dite formule de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

De la même façon on établit aussi l’expression pour le grandissement transversal avec origine au centre :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

2.3.3 Lentilles accolées

Soit deux lentilles minces L1 et L2 de distances focales f1’ et f2’ respectivement et dont les centres O1 et O2 peuvent être considérés comme confondus en un point unique O (on parle de lentilles minces accolées, voir Figure 25).

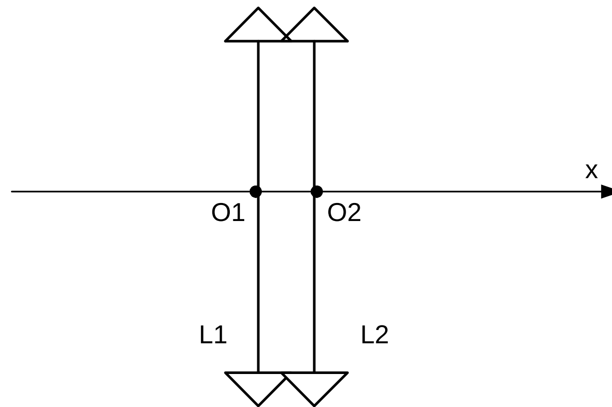


Figure 25 : lentilles minces accolées

Soit A_0 l'image de A à travers L_1 et A' l'image deA_0 à traversL_2 ; écrivons deux fois la formule de conjugaison avec origine au centre :

$$\frac{1}{\overline{OA_0}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f_1'} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA_0}} = \frac{1}{f_2'}$$

En éliminant $\mathbf{OA_0}$ on obtient ainsi :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'}$$

De même on établit facilement la formule pour le grandissement transversal :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

En conclusion l'ensemble des deux lentilles minces accolées est équivalent à une lentille mince unique dont la distance focale f' est donnée par :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'}$$

2.4 Constructions types

2.4.1 Lentille convergente

*Image d'un objet réel situé **avant** le foyer objet :*

La construction correspondante est représentée sur la Figure 23. On a utilisé pour construire l'image de trois rayons particuliers partant de B :

- Le rayon (1) parallèle à l'axe optique qui passe par conséquent par le foyer image F'.
- Le rayon (2) passant par l'origine et qui par conséquent n'est pas dévié.
- Le rayon (3) qui passe par le foyer objet et qui ressort donc parallèle à l'axe optique.

L'image B' de B se situe alors à l'intersection de ces trois rayons particuliers

(évidemment seulement deux de ces trois rayons suffisent pour déterminer B’). L’image est réelle.

Image d’un objet réel situé ***après*** *le foyer objet :*
La construction correspondante est représentée sur la Figure 26. Comme dans le cas précédent on a considéré les trois rayons particuliers (1), (2) et (3) dont on connaît le comportement à travers la lentille. On en déduit alors l’image AB qui est virtuelle.

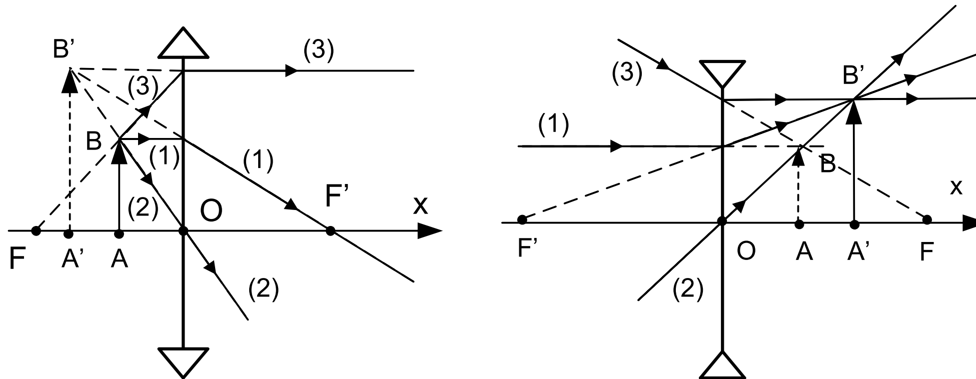


Figure 26 (<u>à gauche</u>) : lentille convergente et construction d’une image d’un objet situé entre le foyer objet (F) et le centre optique (O).

Figure 27 (<u>à droite</u>): lentille divergente et construction d’une image d’un objet virtuel.

2.4.2 Lentille divergente

Image d’un objet réel :
La construction correspondante est représentée sur <u>Figure 24</u>. On a à nouveau considéré les trois rayons particuliers, (1), (2) et (3) ; l’image est virtuelle.
Image d’un objet virtuel :
La construction correspondante est représentée sur la Figure 27. L’image correspondante se détermine à l’aide des trois faisceaux (1), (2) et (3) ; cette image est réelle.

3 Instruments d’optique

Instruments d’optiques remarquables : l’œil, la loupe, le microscope, la lunette astronomique et le télescope

3.1 Généralités sur les instruments optiques

Deux types d’instrument optique:
- objectif : instrument qui produit des images réelles
- subjectif : instrument qui produit des images virtuelles

Caractéristiques remarquables :
- La clarté : caractérise la luminosité de l’image.
- Le grandissement transversal et angulaire

- Le champ : caractérise la portion de l'objet qui peut être observée.
- Le pouvoir de résolution ou pouvoir séparateur : caractérise la finesse des détails que l'instrument permet d'observer.

3.2 L'œil

L'œil est constitué des éléments représentés sur la Figure 28

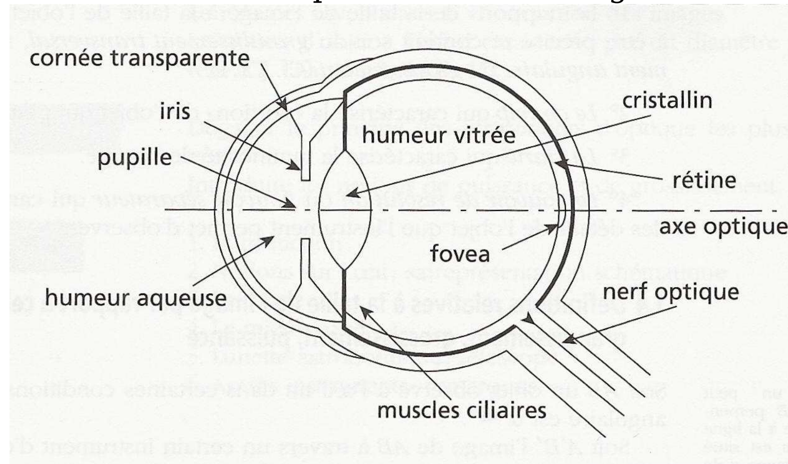


Figure 28 : éléments constituants de l'œil

Les éléments principaux :

- la cornée : agit comme un dioptre sphérique.
- l'iris : agit comme un diaphragme en contrôlant la quantité de lumière entrant.
- le cristallin : agit comme une lentille convergente de focale variable.
- la rétine : écran sur lequel des cellules photosensibles transforment la lumière en influx nerveux.
- la fovéa ou tache jaune : est une partie de la rétine qui permet d'analyser l'image de manière plus fine. Elle est constituée de cellules photosensibles de diamètre ~4 µm s'étalant sur une surface de ~1mm.
- humeur vitrée : liquide transparent d'indice n ~1.4

La distance typique entre le cristallin est la rétine est de 25mm.
Le cristallin se déforme sous l'action de muscles ce qui permet à l'œil d'accommoder, i.e. de voir nettement les points situés à une distance donnée de l'œil.
La distance la plus faible correspond au *punctum proximum* (PP, voir Figure 29), noté par la suite d_m.
La distance la plus grande, notée D, correspond au *punctum remotum* (PR, voir Figure 29). Pour un œil sain adulte, d_m vaut ~ 25cm et D est à l'infini.

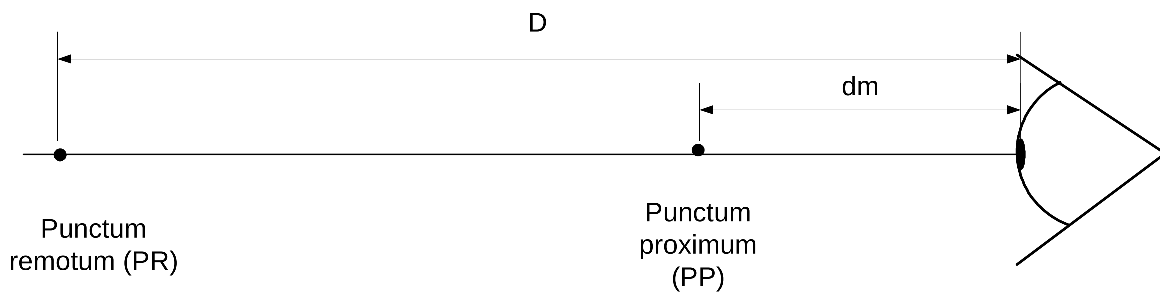


Figure 29 : Positions des punctum proximum et remotum

Les défauts de l’œil :

- myopie (œil myope): lorsque le cristallin est trop convergent. Se corrige à l’aide d’un lentille divergente.
- hypermétropie (œil hypermétrope) : lorsque le cristallin n’est pas assez convergent. Se corrige à l’aide d’une lentille convergente.
- presbytie (œil presbyte): lorsque le PP dépasse par convention 40 centimètres. Ce défaut – lié à la vieillesse - est du à la fatigue du cristallin qui ne peut pas accomoder au maximum.
- astigmatisme (œil astigmate) : lorsque l’œil n’a pas ou plus la symétrie de révolution. Se corrige à l’aide de lentille non-sphérique.

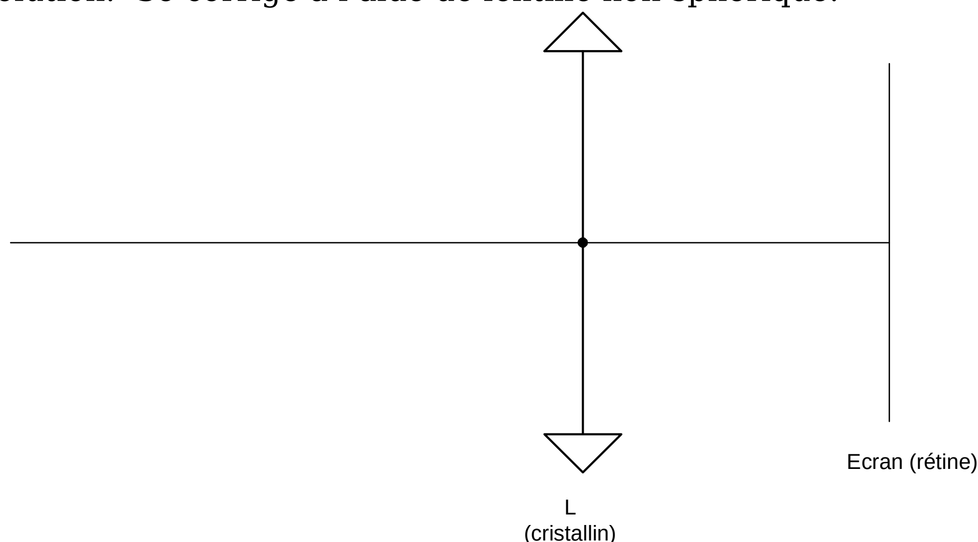


Figure 30 : représentation schématique de l'œil

En première approximation on peut assimiler l’œil (voir Figure 30) comme un instrument composé d’une lentille mince de focale variable (le cristallin) et un écran (la rétine).

Le *pouvoir séparateur* correspond au plus petit détail que l’œil est capable de distinguer. Celui-ci peut être mesuré à l’aide d’une « mire de Foucaut » (voir Figure 31) constituée d’une trame de bandes parallèles noires et blanches équidistantes. Lorsque l’on éloigne progressivement la mire de l’œil, à une certaine distance *d*, l’œil cesse de distinguer les bandes noires des blanches et atteint une sensation de gris. Soit a la distances entre les bandes, le pouvoir

séparateur de l'œil se caractérise par l'angle :

$$\varepsilon = \frac{a}{d}$$

Un ordre de grandeur : $\varepsilon \approx 4 10^{-4}$ (rad). Au minimum de vision distincte (i.e. au punctum proximum dm ~25 cm), le pouvoir séparateur de l'œil correspond à des détails ~ 0.01 mm. La loupe et le microscope permettent d'abaisser ces limites.

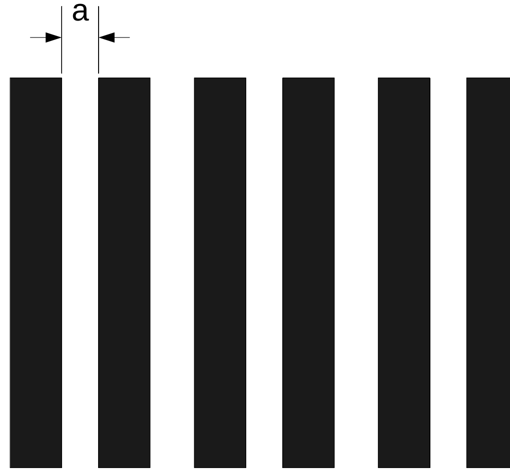


Figure 31 : Mire de Foucault

3.3 La loupe

La loupe est une lentille convergente destinée à observer des petits détails qui ne seraient pas décelables à l'œil nu (ou difficilement) .
Soit *d* la distance entre l'œil est un objet AB de petite taille; celui-ci est vu avec un angle $a = AB/d$ (voir Figure 32, gauche).
La plus grande valeur possible de *a* correspond au punctum proximum dm et vaut : $a_{PP} = AB/d_m$.
En plaçant l'œil derrière une lentille convergente, l'objet AB a pour image A'B' vu sous l'angle a' (voir Figure 32, droite).

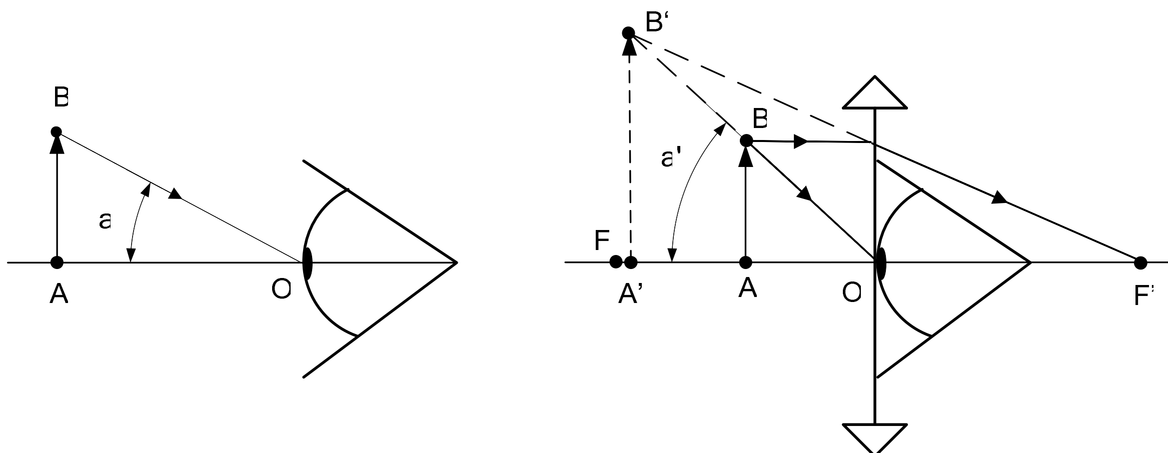


Figure 32 : Objet (AB) vu à l'œil nu (à gauche) et à travers la loupe (à droite).

Par définition , la *puissance* P de la loupe et le *grossissement* G valent :

$$P \equiv \left| a' / \overline{AB} \right| \text{ et } \quad G \equiv |a'/a|$$

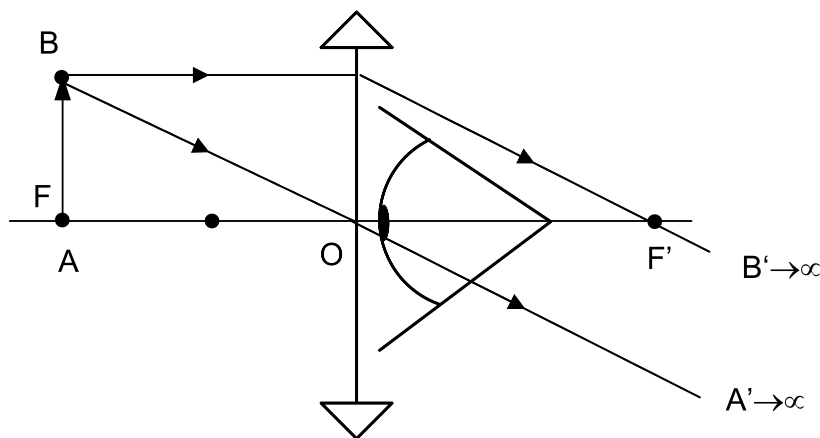


Figure 33 : Ojbet (AB) placé au foyer objet de la loupe

Pour observer l'image A'B' sans accommoder (autrement dit sans fatiguer l'œil), il faut que cette image soit placée à l'infini. Pour cela il suffit de placer l'objet au niveau du plan focal objet de la loupe (voir Figure 33), soit **AO**=f ' d'où a'= AB/f' de sorte que la puissance vaut alors :

$$P_i = \left| 1/ f' \right|$$

dite puissance *intrinsèque*[1]. La puissance intrinsèque permet de comparer les instruments entre eux dans des conditions normalisées.

Le grossissement *commercial* (G_c) est la valeur particulière de G lorsque que l'on

[1] « *intrinsèque* » dans la mesure où, dans ces conditions particulières d'utilisation, la puissance ne dépend que des propriétés de l'instrument ; ce qui permet donc de comparer deux instruments dans les mêmes conditions.

observe l'objet à l'œil nu en le plaçant au punctum proximum (d_m) et en le plaçant ensuite dans le plan objet de la loupe (autrement dit le grossissement *commercial* est le rapport entre l'angle sous lequel on voit A'B', l'image de AB, placée à l'infini et l'angle sous lequel on voit l'objet à l'œil nu et à une distance d_m). On a alors :

$G_c = d_m / f'$, soit également $G_c = d_m \; P_i$

On voit donc bien que la loupe grossie d'autant plus que la distance focale est petite.

3.4 Le microscope

Le microscope (voir Figure 34) est constitué de l'association de deux lentilles convergentes, L1 et L2, la première étant appelée l'*objectif* et la dernière l'*oculaire*. La distance entre F2 et F1' est caractéristique de l'instrument ; elle sera notée *D* par la suite. La distance de L1 à l'objet peut en revanche être réglée par un système à crémaillère. Soit (A',B') l'image de (A,B) à travers la lentille L1. L2 donne de (A',B') une image virtuelle (A1B1). Pour observer l'image (A1B1) avec l'œil sans accommoder, il faut qu'elle soit placée à l'infini et donc placer (A'B') sur le plan focale objet de L2.
La puissance peut s'écrire de manière générale comme :

$$P \equiv \left| a' / \overline{AB} \right| = \left| \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \; \frac{a'}{\overline{A'B'}} \right| = \left| \gamma_1 \right| P_2$$

où P2 est la puissance de l'oculaire et γ_1 le *grandissement* de l'objectif.
La puissance intrinsèque (Pi) correspond à la puissance obtenue lorsque que l'image est à l'infini (i.e. lorsque A'=F2). Par ailleurs le microscope est construit de manière à ce que $f_1' \ll D$. On établit alors les relations suivantes :

$$P_2 = 1/f_2' \text{ et } \gamma_1 = \frac{\overline{O_1A'}}{O_1A} = \frac{f_1' + D}{O_1A} \cong -D/f_1' \text{ d'où } P_i = \frac{D}{f_1' f_2'}$$

Le grossissement *commercial*[2], Gc est le rapport entre l'angle *a*' lorsque l'image est placée à l'infini et l'angle *a* sous lequel on voit l'objet à l'œil nu à la distance d_m (i.e. au punctum proximum), soit :

$$G_c \equiv \left| \frac{a'_\infty}{a_{PP}} \right|$$

or $a'_\infty = \overline{A'B'} / f_2' = \gamma_1 \overline{AB} / f_2'$ et $a_{PP} = \overline{AB} / d_m$, d'où :

[2] Terme généralement utilisé par les constructeurs et faisant référence à une utilisation particulière de l'instrument.

$$G_c = \frac{D\, d_m}{f_1^{'}\ f_2^{'}}$$

qui peut s'écrire aussi :

$$G_c = |\gamma_1| \quad G_{c,2}$$

avec G_{c2} le grossissement commercial de l'oculaire. Le grossissement commercial est donc le produit du grandissement de l'objectif et du grossissement commercial de l'oculaire. On voit donc l'intérêt d'associer deux lentilles car on peut obtenir de forts grossissements tout en conservant l'ouverture de l'instrument ; en effet avec une loupe, pour obtenir un grossissement équivalent, on aurait du utiliser une focale plus petite que l'objectif du microscope (L1), donc une ouverture plus petite.

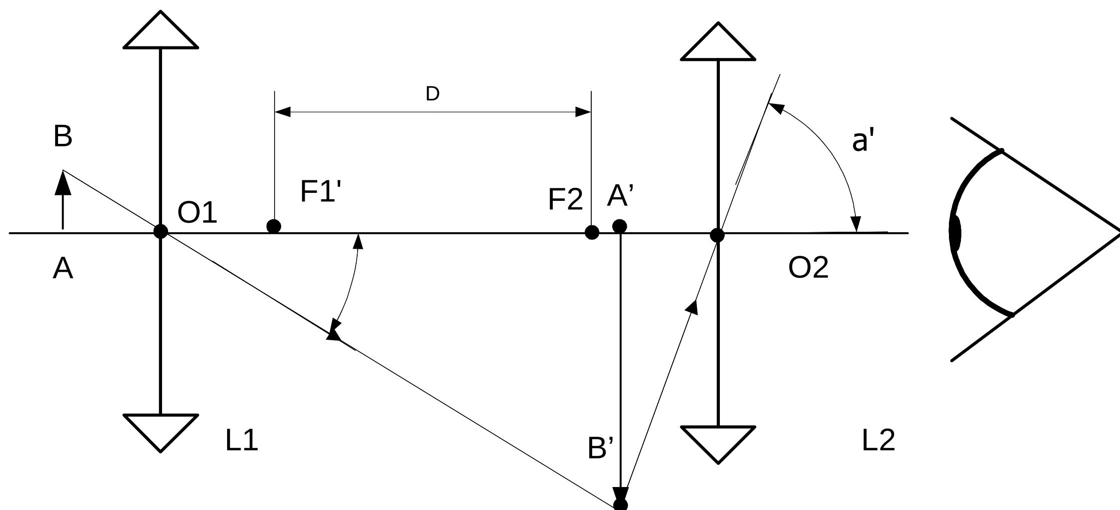


Figure 34 : schéma d'un microscope simplifié

3.5 La lunette astronomique

La lunette permet d'observer les détails des objets situés à l'infini. Cet instrument est schématisé sur la Figure 35. Elle est construite de manière à maximiser d'une part le grossissement de manière à voir les détails des objets (typiquement des planètes) et d'autre part la clarté de l'instrument (autrement dit l'ouverture de l'objectif) de manière à collecter le plus possible de photons.

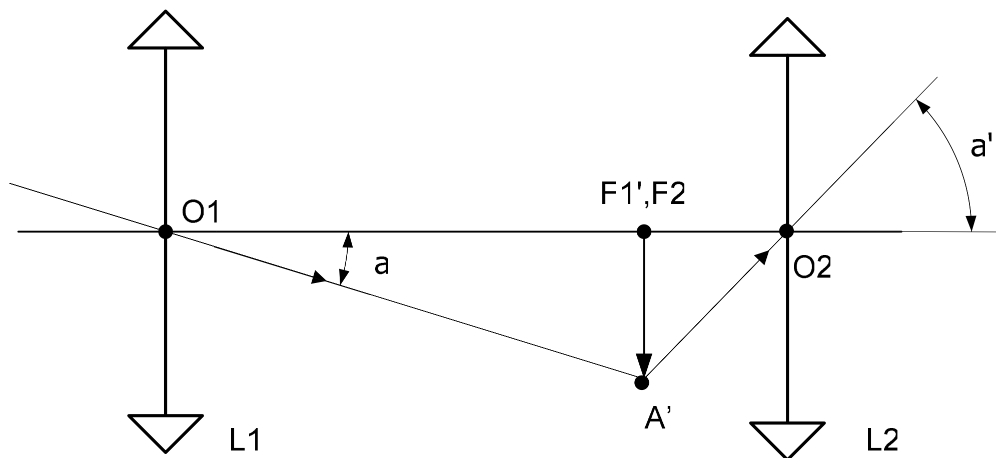


Figure 35 : Principe de la lunette astronomique

La lentille L1 donne d'un objet situé à l'infini et de diamètre apparent *a*, une image A'F1' situé dans le plan focal de L1. La lentille L2 (appelée l'oculaire) donne ensuite de l'image A'F1', une image située à l'infini. Cet objet est vu avec l'angle apparent *a'*.
On montre aisément que le grossissement (*G*) de la lunette s'écrit :

$$G = |a'/a| = f_1' / f_2'$$

Il s'agit de maximiser le grossissement , donc de maximiser la focale f1' et minimiser la focale f2'. L'oculaire sera typiquement caractérisé par une petite focale et la lentille L1 par une grande.

On remarquera que cet instrument inverse les images ce qui n'est pas un problème en astronomie mais l'est pour d'autres usage tel que l'observation d'objets terrestres. Le problème est surmonté à l'aide d'une lentille divergente ; cette solution convient pour des faibles grossissement de l'ordre de 3 à 4, au delà le champ devient trop réduit. Dans ce cas on fait subir au faisceau deux réflexions sur des prismes (ex : grosses jumelles) .

3.6 Le télescope

Au lieu d'utiliser des lentilles, le télescope utilise deux miroirs ce qui l'affranchit du problème des *aberrations chromatique*s. L'usage de deux miroirs conduit à trouver des solutions pour « sortir » l'image pour l'observer. Il existe pour cela plusieurs solutions schématisées sur Figure 36, Figure 37 et Figure 38.

La qualité première d'un télescope réside dans sa capacité à collecter le plus de lumière possible pour rendre possible l'observations d'astres lointains (donc en général peu lumineux). C'est pourquoi on cherche à maximiser la surface collectrice du télescope (i.e. à maximiser son diamètre).

Les objets observés sont en général lointains (donc placés à l'infini) : lorsque la surface du télescope est parfaitement régulière (surface sphérique, parabolique ...etc), l'observation des objets lointains s'effectue alors dans les conditions de stigmatisme. La seconde qualité d'un télescope réside donc dans la régularité de sa surface.

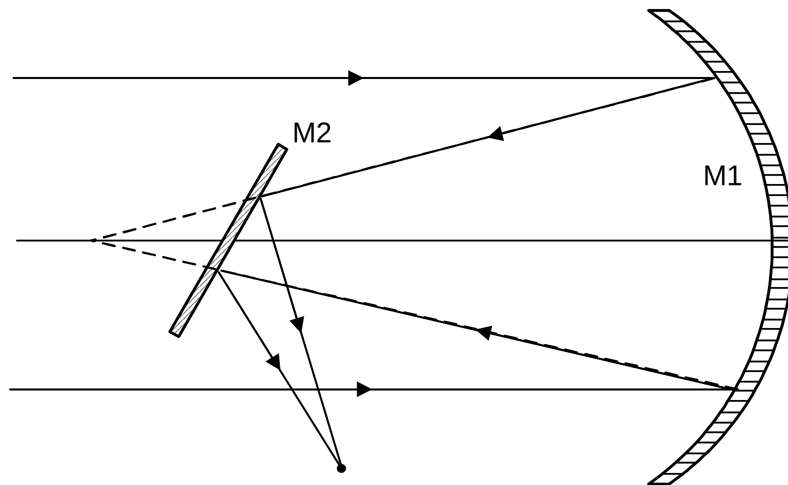


Figure 36 : Télescope de Newton (M2 est plan)

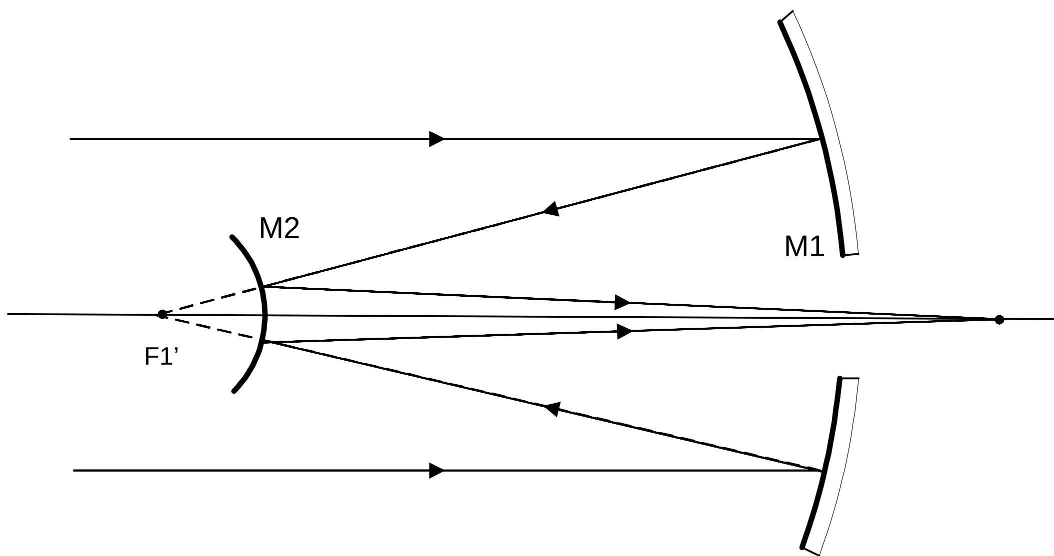


Figure 37 : Télescope Cassegrain (M2 hyperbolique)

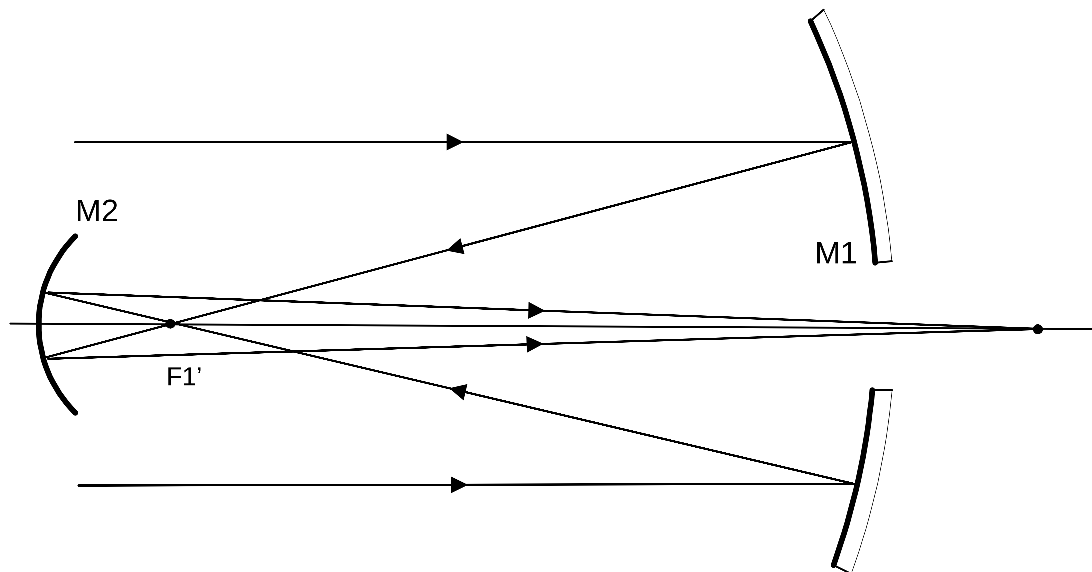


Figure 38 : Télescope de Gregory (M2 elliptique)

4 Notions de photométrie

Sources ponctuelles ; Notion d'angle solide ; Sources étendues : Luminance , éclairement

4.1 Energie lumineuse émise par une source ponctuelle

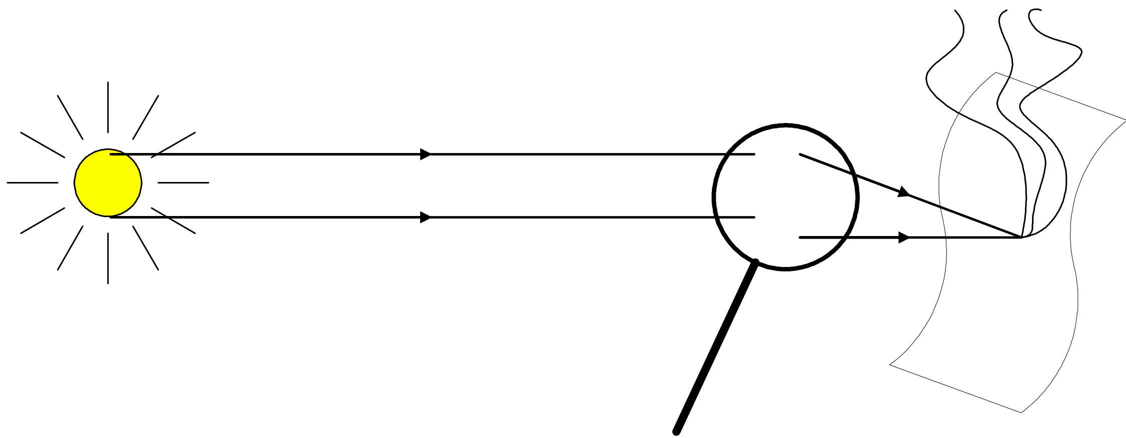


Figure 39 : Mise en évidence de l'énergie lumineuse

L'expérience de la loupe (Figure 39) : Les faisceaux lumineux focalisés sur la feuille de papier produisent un échauffement qui peut provoquer la combustion du papier ☞ mis en évidence de l'énergie lumineuse.

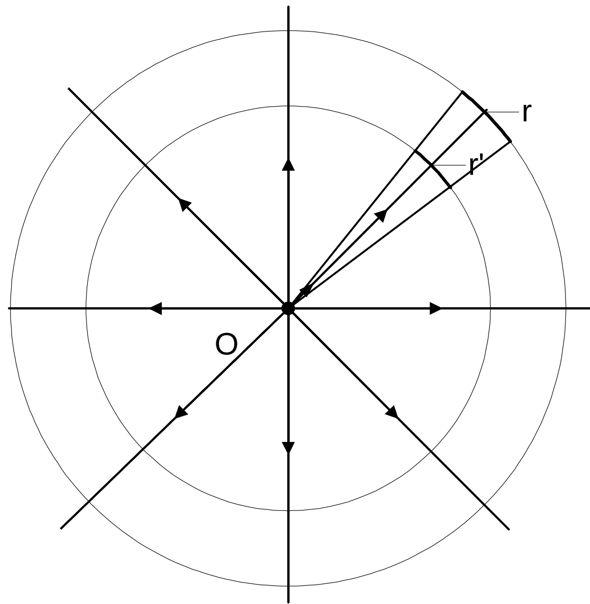


Figure 40 : énergie lumineuse émise par une source ponctuelle

4.1.1 Loi des carrés inverses

Soit une *source ponctuelle* (voir Figure 40). Il n'existe pas de direction de propagation privilégiée, par conséquent cette source émet une énergie lumineuse de manière *isotrope* (i.e. de la même façon quelque soit la direction de l'espace). Supposons que la source ponctuelle émet dans toute l'espace par unité de seconde une énergie lumineuse égale à ψ_0 .

☞ ψ_0 s'exprime en Watt (rappel : 1 Watt = 1 Joule /s).

Considérons la sphère de centre O et de rayon *r*. L' énergie lumineuse qui la traverse par unité de seconde et par *unité de surface* est par conséquent égale à $f(r) = \psi_0 / r^2 / 4\pi$.

☞ Cette densité surfacique d'énergie lumineuse (f) décroît donc comme $1/r^2$ ☞ *loi des carrés inverses*.

4.2 Angles solides

4.2.1 Introduction

Considérons un élément de surface dS situé sur la sphère de rayon R (voir Figure 40). Cet élément de surface recevra donc par unité de seconde la quantité d'énergie égale à : $f(r)\ dS = (\psi_0 / 4\pi)\ (dS/ r^2)$.

Nous somme ainsi amnené à définir la quantité $d\Omega = dS/ r^2$, que l'on appelle *angle solide* sous lequel la surface collectrice (dS) est vue depuis le point O.

L'énergie qui traverse dS s'écrit alors : $d\psi = d\Omega\ (\psi_0 / 4\pi) = (d\Omega/4\pi)\ \psi_0$

Les rayons de lumière arrivant sur la surface dS, forment un *cône de lumière*. Soit la sphère de rayon *r'*. Celle-ci sectionne le cône de lumière et délimite une surface dS'. On a la relation d'homothétie $d\Omega = dS/ r^2 = dS'/ r'^2 = d\Omega'$, par

conséquent l'angle solide sous lequel la surface dS est vue depuis O est équivalent à celui sous lequel la surface dS' est vue.
L'égalité de ces angles solides permet de vérifier que l'énergie se propageant dans ce cône de lumière se conserve. En effet, l'énergie traversant dS est égale à $d\Omega\ (\psi_0/4\pi)$ tandis que celle traversant dS' est égale à $d\Omega'\ (\psi_0/4\pi)$.

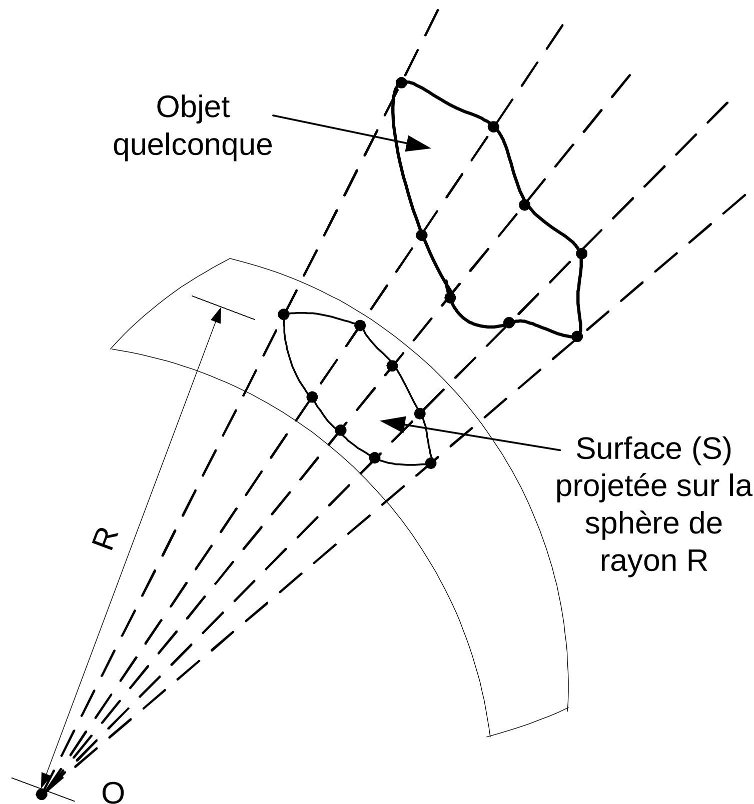


Figure 41 : Angle solide sous lequel l'objet est observé

4.2.2 Définition générale

Soit l'objet de forme quelconque représenté sur la Figure 41, soit un point O à partir duquel l'objet est observé et soit enfin une sphère de rayon R et de centre O. Considérons le faisceau de lignes concentriques passant par O et par les extrémités de l'objet. L'intersection de ce faisceau avec la sphère de rayon R délimite une surface S qui correspond à la projection de l'objet sur la sphère.
On définit alors « l'angle solide sous lequel l'objet est observé » la quantité :

$$\Omega \equiv \frac{S}{R^2}$$

☞ On montre que cette quantité est indépendante du rayon R
☞ L'angle solide est d'autant plus grand que l'objet est proche ou étendu.

☞ L'unité d'angle solide est le *stéradian* noté strd par la suite.
☞ L'angle solide sous lequel on voit la totalité de l'espace est égal à 4π.

4.2.3 Angle solide élémentaire

Considérons une surface dS infinitésimale (ou élémentaire) et plaçons nous dans les coordonnées sphériques (cf. Figure 42). On a donc :

$$dS = (r \sin\theta d\phi)(r d\theta)$$

On en déduit alors dΩ, l'angle solide infinitésimale (ou élémentaire) :

$$d\Omega \equiv \frac{dS}{r^2} = \frac{r \sin\theta\, d\phi\, r\, d\theta}{r^2} = \sin\theta\, d\phi\, d\theta$$

☞ On constate que l'angle solide est bien indépendant du rayon *R* choisi.

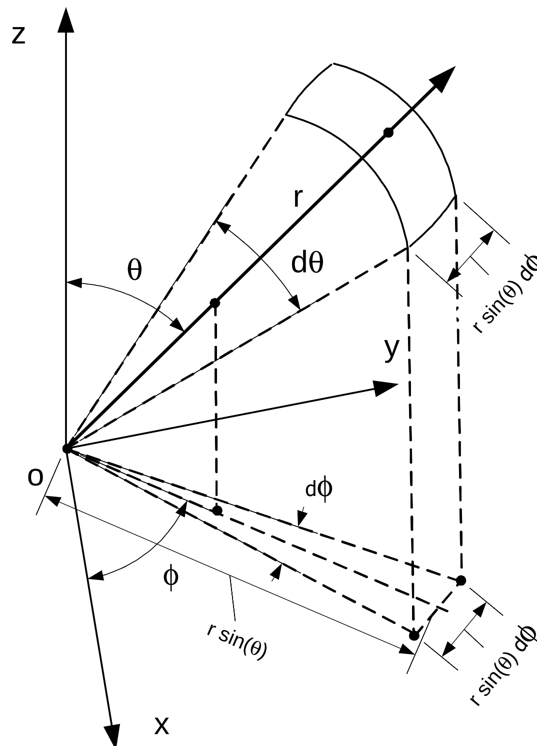


Figure 42 : Angle solide élémentaire (infinitésimal)

4.3 Source étendue : luminance et éclairement

4.3.1 Luminance de rayonnement

Soit la surface dS infinitésimale représentée sur la Figure 43 et **n** la normale à cette surface. Soit *L*(θ,ϕ) le flux lumineux par unité de surface et unité d'angle solide se propageant dans la direction donnée (θ,ϕ) (repérée en coordonnées

sphérique par rapport à l'axe **n**) et soit enfin un angle solide infinitésimal dΩ, orienté dans cette direction.
☞ On désigne *L* sous le terme *luminance de rayonnement* ou encore *intensité spécifique* de rayonnement.
☞ *L*(θ,ϕ) s'exprime en Watt /m²/strd.

La quantité de flux lumineux se propageant dans l'angle solide, est donc égale à :

$$d\psi = L(\theta,\varphi)\, d\Omega dS \cos(\theta)$$

☞ La quantité dS cos(θ) représente la surface apparente de dS vue sous l'angle θ avec la normale.
☞ dψ s'exprime en Watt.
☞ Lorsque *L* est indépendant de θ et ϕ, on dit que le rayonnement suit la *loi de Lambert*.

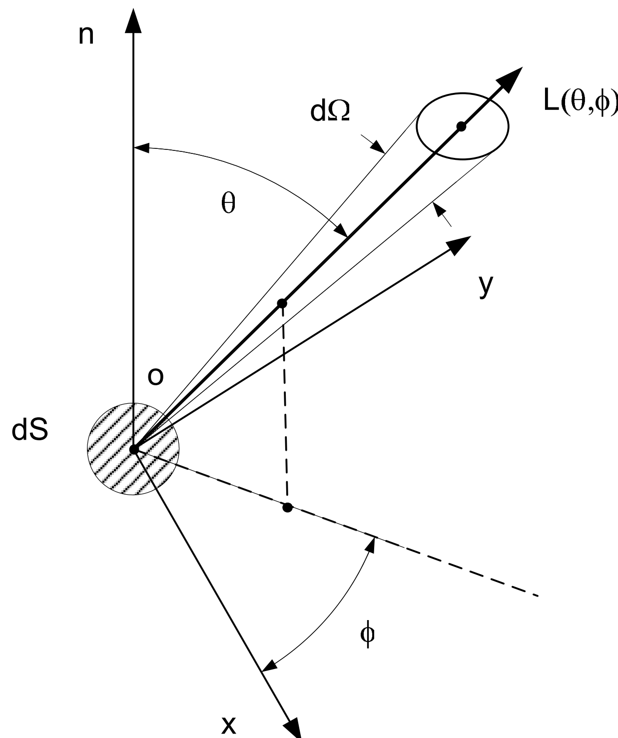


Figure 43 : L(θ,φ) : flux lumineux rapporté à l'unité de surface et d'angle solide (*luminance* de rayonnement).

Soit une surface élémentaire dS source d'une lumière de luminance L(θ,ϕ) et une surface collectrice de surface élémentaire dS' (voir Figure 44). La quantité de lumière reçue par la surface collectrice est égale à :

$$d\psi = L(\theta,\varphi)\, dS \cos(\theta) d\Omega\,'$$

où dΩ' est l'angle solide sous lequel la surface collectrice est vue de la surface

émettrice. Cette angle solide vaut donc $d\Omega' = \cos(\theta')\, dS'/r^2$ où $\cos(\theta')\, dS'$ représente la surface apparente de la surface collectrice vue de la surface émettrice.
La formule précédente peut donc aussi s'exprimer comme :

$$d\psi = L(\theta,\varphi)\; dS \cos(\theta)\; dS' \cos(\theta') / r^2 = L(\theta,\varphi)\; d\Omega\; dS' \cos(\theta')$$

avec $d\Omega = \cos(\theta)\, dS/r^2$ l'angle solide sous lequel la surface émettrice est vue de la surface collectrice.

4.3.2 Eclairement

La division de dψ par dS' définit l'*éclairement* de la surface élémentaire par la source :

$$dE = d\psi / dS' = L(\theta,\varphi) d\Omega \cos(\theta')$$

L'éclairement total s'obtient en intégrant sur les angles solides :

$$E = \int L(\theta,\varphi) \cos(\theta') d\Omega$$

☞ E s'exprime en Watt /m².
☞ Pour déduire l'énergie lumineuse reçue par unité de surface par une surface collectrice, il suffit donc de multiplier son éclairement (E) par sa surface.

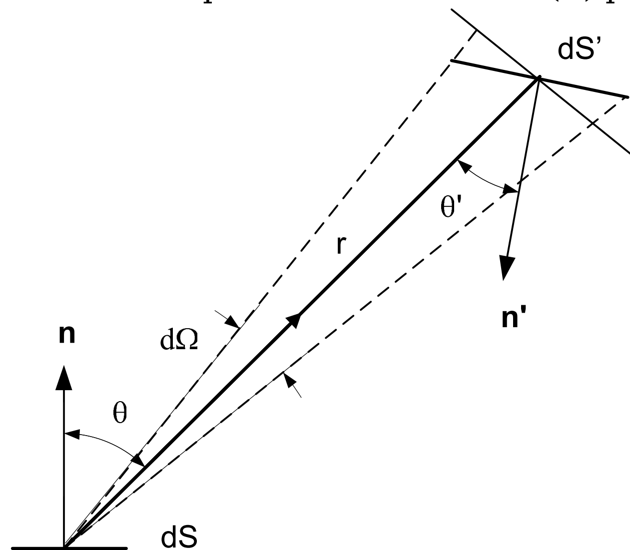


Figure 44 Surface dS' recevant l'énergie lumineuse émise par une surface dS

4.3.3 Luminance et éclairement des images à travers un système optique

On considère une surface émettrice S rectangulaire et son image S' à travers un système optique (Figure 45). Le flux lumineux émis par la source dans la direction u et dans l'angle solide d Ω s'écrit : $d\psi = S\, L(u) \cos(u) d\Omega$ avec $d\Omega = 2\pi \sin(u) du$

De même le flux lumineux reçu par la surface collectrice S' s'écrit :

$d\psi' = S'L'(u)\cos(u')d\Omega'$ avec $d\Omega' = 2\pi\sin(u')du'$

On se place dans les conditions de Gauss. On note AB la dimension de la surface émettrice dans une direction et A'B' l'image du segment AB à travers le système optique séparant un milieu d'indice n et n' ; la relation de Lagrange-Helmholtz donne alors :

$$n\,\overline{AB}\,u = n'\,\overline{A'B'}\,u'$$

L'autre dimension de la surface vérifie la même relation si bien que l'on a :

$$dS\;n^2\;u^2 = dS'\;n'^2\,u'^2$$

Différencions l'équation précédente, il vient alors :

$$dS\;n^2\;u\,du = dS'\;n'^2\,u'\,du'$$

On suppose un système conservatif, par conséquent $d\psi = d\psi'$ et l'on montre ainsi la relation :

$$\frac{L'}{L} = \left(\frac{n'}{n}\right)^2$$

☞ Cette relation – valable quelque soit *u* petit - permet donc d'exprimer la luminance de l'image en fonction de celle de la source.
☞ Si n'=n, notre calcul montre que l'égalité des luminances tient à ce que le grandissement de l'aire de l'image s'accompagne d'une diminution égale de l'angle solide dans lequel est envoyé le flux lumineux.

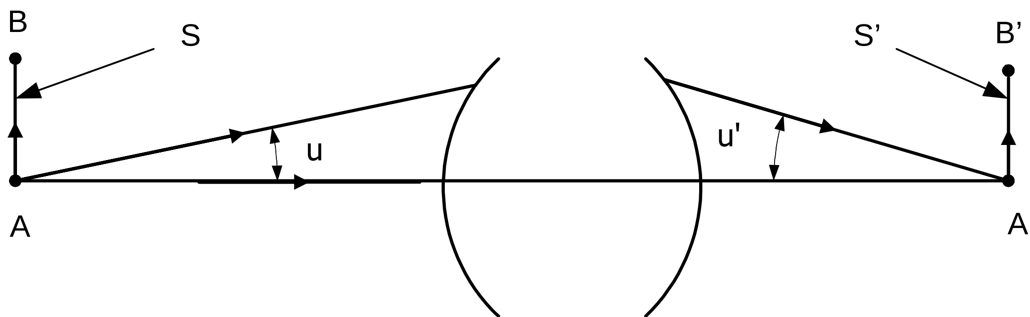


Figure 45 : Image d'une surface S à travers un système optique